Wärmeleitung in Baukonstruktionen unter Berücksichtigung von Wärmequellen

Klaus Kreč

1. Einleitung

Zum Thema der Wärmeleitung in Baukonstruktionen existiert eine umfangreiche Literatur. In der Mehrzahl der Fälle wird dabei nur der eindimensionale Fall der stationären Wärmeleitung abgehandelt. Der in der Realität vorliegende Fall der dreidimensionalen instationären Wärmeleitung wurde der praktischen Berechnung erst in letzter Zeit unter Zuhilfenahme der elektronischen Datenverarbeitung zugänglich. Ein derartiges Konzept, das zumindest zum Teil schon in anwendbare EDV-Programme umgesetzt ist, wird z. B. in [1] (stationärer Fall) und [2] (instationärer Fall) geschildert.

Bedenkt man, daß die thermischen Vorgänge in einem Bauwerk nicht nur durch die Außenlufttemperatur und die Lufttemperaturen in seinen Innenräumen bestimmt werden, sondern ebenso durch die Wärmequellen, die infolge von Sonneneinstrahlung, langwelliger Wärmestrahlung und natürlich auch beim Betrieb von Heizkörpern auftreten, so wird einem klar, daß jedes Konzept, das diese Wärmequellen nicht berücksichtigt, unvollständig und wirklichkeitsfremd bleiben muß.

Die an der äußeren Oberfläche einer Fassade bzw. eines Gebäudes aufgrund der Sonnenstrahlung und des langwelligen Strahlungsaustausches auftretenden Wärmequellen können in einfacher Weise durch Einführung einer fiktiven Außenlufttemperatur berücksichtigt werden [3], sodaß sie hier nicht speziell erörtert werden müssen. Auch die in Fensterscheiben aufgrund der Sonneneinstrahlung durch teilweise Absorption entstehenden Wärmequellen können zumindest näherungsweise (quasistationär) mit den in DIN 67507 angegebenen Formeln berücksichtigt werden. Anders liegen die Dinge bei jenen Wärmequellen, die an inneren Bauteiloberflächen infolge Sonneneinstrahlung durch die Fenster oder infolge der Absorption langwelliger Strahlung auftreten, die von Heizkörpern, Personen oder Beleuchtungskörpern abgegeben wird. Das gleiche gilt erst recht für Wärmequellen innerhalb von Bauteilen, wie sie etwa bei einer elektrischen Fußbodenheizung anzunehmen sind.

Wie solche Wärmequellen berücksichtigt werden können, wurde schon 1975 unter Beschränkung auf eindimensionale Wärmeleitung und flächenhafte Wärmequellen in [4] für den periodisch eingeschwungenen Fall besprochen. Hier soll der dreidimensionale Fall und der Zusammenhang mit dem in [2] geschilderten Leitwert-Konzept behandelt werden.

Dr. Klaus Kreč, c/o Dr. W. Heindl, Büro für angewandte Mathematik, Wien.

2. Wärmeleitung mit Wärmequellen

Der *Fourier*sche Wärmestrom-Ansatz

$$\vec{q} = -\lambda \cdot \operatorname{grad} U, \qquad (1)$$

der die Wärmestromdichte $\vec{q}$ über die Wärmeleitfähigkeit λ mit dem Gefälle der Temperatur U verknüpft, bleibt auch gültig, wenn in dem betrachteten Festkörper räumlich verteilte Wärmequellen der Quelldichte W auftreten. Dabei wird W im allgemeinen sowohl vom Ort als auch von der Zeit abhängen. Flächenhafte, linienhafte und punktuelle Wärmequellen sollen hier nicht separat betrachtet werden, da man sie aus räumlich verteilten stets durch Grenzübergänge gewinnen kann. Der Wärmestromansatz (1) ist durch eine Bilanzgleichung zu ergänzen, die bei Anwesenheit von Wärmequellen die Form

$$c \cdot \varrho \cdot \frac{\partial U}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{q} + W \qquad (2)$$

annimmt [5]. Hierin ist c die spezifische Wärmekapazität und ϱ die Massendichte des Baustoffes. Setzt man hier $\vec{q}$ gemäß Gleichung (1) ein, so erhält man die Wärmeleitungsgleichung in der Form

$$c \cdot \varrho \cdot \frac{\partial U}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} U) = W. \qquad (3)$$

Im stationären Fall verschwindet die Ableitung nach der Zeit t und die Wärmeleitungsgleichung reduziert sich auf

$$-\operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} U) = W; \qquad (4)$$

in diesem Fall darf die Quelldichte W der Wärmequellen natürlich nur vom Ort abhängen.

Zur Festlegung einer speziellen Lösung der Wärmeleitungsgleichung (3) bedarf es der Angabe zusätzlicher Bedingungen. Zum einen sind Randbedingungen vorzuschreiben, die an den Rändern des betrachteten Gebietes erfüllt sein müssen. Zum zweiten bedarf es der Festlegung einer Anfangstemperaturverteilung oder äquivalenter Bedingungen, wie etwa jener der Periodizität mit vorgegebener Periode. Auf derartige periodische Vorgänge bleiben die im folgenden dargelegten Überlegungen beschränkt.

Die Berücksichtigung von Randbedingungen kann bei Abwesenheit von Wärmequellen auf die in [2] geschilderte Weise erfolgen. In dem allgemeinen durch die Differentialgleichung (3) beschriebenen Fall kann man wie folgt vorgehen: Man sucht zuerst jene Lösung U_H der homogenen Differentialgleichung

$$c \cdot \varrho \cdot \frac{\partial U_H}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} U_H) = 0, \tag{5}$$

die den gegebenen Randbedingungen genügt. Die für jeden Raum k gegebenen, innerhalb dieses Raumes als ortsunabhängig angenommenen Raumtemperaturverläufe T_k führen unter Berücksichtigung der Wärmeübergangskoeffizienten α_k auf Randbedingungen dritter Art. Diese Randbedingungen lauten bei m + 1 Räumen (siehe [2])

$$(\lambda \cdot \operatorname{grad} U_H) \cdot \vec{n} + \alpha_k U_H = \alpha_k T_k, \quad (k = 0, 1, \ldots, m). \tag{6}$$

Hierin bedeutet $\vec{n}$ den in den k-ten Raum weisenden Normaleneinheitsvektor der Bauteiloberfläche.

Ferner sucht man eine spezielle Lösung U_I der inhomogenen Differentialgleichung (3), die zu verschwindenden Raumtemperaturen paßt, also den Randbedingungen

$$(\lambda \cdot \operatorname{grad} U_I) \cdot \vec{n} + \alpha_k U_I = 0, \quad (k = 0, 1, \ldots, m) \tag{7}$$

genügt. Superposition von U_H und U_I liefert eine Temperaturverteilung

$$U = U_H + U_I, \tag{8}$$

die ersichtlich sowohl der Wärmeleitungsgleichung (3) genügt, als auch die Randbedingungen

$$(\lambda \cdot \operatorname{grad} U) \cdot \vec{n} + \alpha_k \cdot U = \alpha_k T_k \tag{9}$$

befriedigt.

Weder das Randwertproblem zur Bestimmung von U_H noch jenes für U_I ist im allgemeinen ohne zusätzliche Bedingungen eindeutig lösbar. Erst die Forderung der Periodizität mit gegebener zeitlicher Periode behebt diese Vieldeutigkeit. Natürlich hat man auch eine eindeutige Lösung zu erwarten, wenn man sich auf stationäre Wärmeleitung beschränkt; dieser Fall soll zunächst behandelt werden.

3. Der stationäre Fall

Im stationären Fall ist auf die Wärmeleitungsgleichung in Form der Differentialgleichung (4) zurückzugreifen. Dabei interessiert hier nur die Lösung U_I der inhomogenen Differentialgleichung, die den Randbedingungen (7) genügt, also zu verschwindenden Raumtemperaturen gehört, da der Lösungsanteil U_H schon in [1] ausführlich behandelt wurde.

Die Quelldichte W(x, y, z) ist im gesamten Gebiet G definiert, in dem die Wärmeleitungsvorgänge untersucht werden. Treten Wärmequellen nur in einem Teilgebiet auf, so ist außerhalb dieses Teilgebietes W = 0 anzunehmen. In der Praxis steht meist nicht die räumliche Verteilung der Wärmequellen im Vordergrund des Interesses, sondern die durch

$$H = \iiint_G W(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \tag{10}$$

gegebene Gesamtheizleistung. Dies legt es nahe, die Quelldichte W in der Form

$$W(x, y, z) = H \cdot r(x, y, z) \tag{11}$$

anzusetzen. Natürlich ist dies nur möglich, wenn das Integral in (10) nicht verschwindet, in der Quelldichteverteilung W also nicht Quellen und Senken einander die Waage halten. Die Funktion r(x, y, z) ist derart normiert, daß ihr Integral über dem Gebiet G den Wert 1 annimmt; r hat dann die Dimension eines reziproken Volumens.

Die von den Wärmequellen mit einer Quelldichte W erzeugte Wärme muß im stationären Fall zur Gänze über die Berandungen des Gebietes G abfließen, also den Räumen (inklusive Außenraum) über deren Berandungen $\mathscr{R}_k$ zukommen. Von besonderem Interesse ist dabei die Frage, welcher Anteil V_j der Gesamtheizleistung H dabei dem Raum j zukommt; die Anteile V_j bilden in ihrer Gesamtheit den „Verteilungsschlüssel" der Heizleistung H.

Geht man mit (11) in die für U_I gültige Differentialgleichung (4) hinein, so geht diese nach Division durch H und mit der Abkürzung

$$F = \frac{U_I}{H} \tag{12}$$

in

$$-\operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} F) = r \tag{13}$$

über. Aus der Randbedingung (7) wird

$$(\lambda \cdot \operatorname{grad} F) \cdot \vec{n} + \alpha_k \cdot F = 0. \tag{14}$$

Die aufgrund der Quelldichteverteilung W sich bei verschwindenden Raumtemperaturen einstellende Temperaturverteilung U_I führt zu einem Wärmestrom Q_j^* in den Raum j, der durch

$$Q_j^* = \iint_{\mathscr{R}_j} (\lambda \cdot \operatorname{grad} U_I) \cdot d\vec{a} \tag{15}$$

gegeben ist; dabei weist $d\vec{a}$ vom Raum j in den Bauteil. Mit (12) folgt daraus

$$V_j = \frac{Q_j^*}{H} = \iint_{\mathscr{R}_j} (\lambda \cdot \operatorname{grad} F) \cdot d\vec{a}. \tag{16}$$

Wie man sieht, ist der Verteilungsschlüssel für die Heizleistung von dieser unabhängig. Er wird alleine durch die Eigenschaften der Baukonstruktion und die normierte Heizleistungsverteilung r(x, y, z) bestimmt und ist von den Randbedingungen – den Raumtemperaturen T_k – völlig unabhängig.

Da die Heizleistung H vollständig auf die Räume verteilt wird, muß die Summe der Anteile V_j den Wert 1 ergeben. Bildet man nämlich diese Summe, so erhält man zunächst

$$\sum_{j=0}^{m} V_j = \oiint_{\mathscr{R}} (\lambda \cdot \operatorname{grad} F) \cdot d\vec{a}. \tag{17}$$

Die Integration wird hier über alle Ränder $\mathscr{R}_i$, also den Gesamtrand $\mathscr{R}$ der Baukonstruktion erstreckt. Durch Anwendung des *Gauß*schen Integralsatzes geht Gleichung (17) über in

$$\sum_{j=0}^{m} V_j = -\iiint_{\mathscr{G}} \operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} F) \cdot dx\,dy\,dz. \tag{18}$$

Mit Gleichung (13) wird daraus schließlich

$$\sum_{j=0}^{m} V_j = \iiint_{\mathscr{G}} r\,dx\,dy\,dz. \tag{19}$$

Dieses Integral hat aber aufgrund der vorgenommenen Normierung den Wert 1.

In der Realität hat man es bei einer Baukonstruktion – man kann, wenn man will, an ein ganzes Gebäude denken – mit einer Vielzahl von Wärmequellenverteilungen zu tun, deren Heizleistungen größtenteils unabhängig voneinander bestimmt werden. Dies stellt kein grundsätzliches Problem dar, da man aufgrund der Linearität der Wärmeleitungsgleichung superponieren kann.

Ein praktisches Problem ergibt sich jedoch daraus, daß so manche Wärmequellenverteilungen von vornherein durch Personenbelegung, Sonneneinstrahlung, Beleuchtung, etc. vorgegeben sind, andere aber – insbesondere jene, die man zum eigentlichen Heizungssystem zählt – so betrieben werden sollen, daß sich gewünschte Raumlufttemperaturen einstellen. Beim Heizungssystem treten also Heizleistungen auf, die vorerst unbekannt sind.

Bedeutet H die Heizleistung einer Wärmequellenverteilung, V_i den dem Raum i zukommenden Anteil dieser Heizleistung, so fließt dem Raum i – wie schon vorhin dargelegt – über seine Begrenzung die Leistung

$$Q_i^* = V_i \cdot H \tag{20}$$

zu. Jene Heizleistungsverteilungen, die im Rahmen des eigentlichen Heizungssystems eines Gebäudes auftreten, wollen wir kurz als „Heizkörper" bezeichnen. Jedem Innenraum wird formal ein „Heizkörper" zugeordnet, sodaß man also die Heizkörper von 1 bis m durchnumerieren kann; der Nummer 0, die den Außenraum charakterisiert, wird kein Heizkörper zugeordnet.[1]

Die von allen Heizkörpern des Gebäudes dem Raum i zukommenden Wärmeströme lassen sich nun einfach durch eine Summe darstellen:

$$Q_i^* = \sum_{j=1}^{m} V_{ij} \cdot H_j. \tag{21}$$

H_j ist die Heizleistung des dem Raum j formal zugeordneten Heizkörpers, V_{ij} jener Anteil dieser Heizleistung, die dem Raum i zukommt.

Dieser Darstellung lassen sich auch Heizkörper unterordnen, deren Wärmequellen ihren Sitz nicht in der Baukonstruktion, sondern in der Raumluft eines Innenraumes haben, wie das bei einer Luftheizung (Heizlüfter) der Fall ist. Bei einer Luftheizung ist $V_{ij} = 0$ für $i \neq j$ und $V_{ii} = 1$.

Natürlich kommen jedem Innenraum auch Wärmeströme zu, die durch heizungs- und temperaturunabhängige Wärmequellen bedingt sind, beispielsweise aufgrund der Sonneneinstrahlung durch die Fenster etc.. Dies bedeutet das Auftreten weiterer Summanden auf der rechten Seite von Gleichung (21). Faßt man diese kurz unter der Bezeichnung Q_i^+ zusammen, so erhält man schließlich

$$Q_i^* = \sum_{j=1}^{m} V_{ij} H_j + Q_i^+. \tag{22}$$

Diesen Wärmegewinnen stehen die Transmissionswärmeverluste[2] Q_i gegenüber, die sich aufgrund der unterschiedlichen Raumtemperaturen T_j ergeben. Letztere können (siehe [1]) unter Verwendung der thermischen Leitwerte L_{ij} in der Form

$$Q_i = -\sum_{j=0}^{m} L_{ij} T_j \tag{23}$$

dargestellt werden.

Da die Wärmegewinne Q_i^* und die Wärmeverluste Q_i einander die Waage halten müssen, gilt offenbar

$$Q_i^* = Q_i. \tag{24}$$

Unter Verwendung der Gleichungen (22) und (23) wird daraus

$$\sum_{j=1}^{m} V_{ij} H_j + Q_i^+ = -\sum_{j=0}^{m} L_{ij} T_j. \tag{25}$$

Die Gleichung ist für jeden Innenraum, also für $i = 1, 2, \ldots, m$ zu formulieren. Sie stellt – zunächst nur für den stationären Fall – die Basis für die Berechnung sowohl von Raumlufttemperaturen als auch von zur Aufrechterhaltung gegebener Temperaturen erforderlichen Heizkörperleistungen dar. Gibt man sämtliche Lufttemperaturen vor, so hat man mit (25) ein System von m linearen Gleichungen für die m Heizleistungen H_j vor sich. Gibt man die Heizkörperleistungen vor – im unbeheizten Fall, also z. B. im Sommer, kann man sie als verschwindend annehmen –, so stellt (25) ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Lufttemperaturen der m Innenräume dar; die Außentemperatur T_0 muß natürlich in jedem Fall gegeben sein.

Werden in einem Gebäude nicht alle Innenräume beheizt, so kann man aus dem Gleichungssystem (25) sowohl die Heizkörperleistungen für die beheizten Innenräume vorgegebener Temperatur als auch die Raumlufttemperaturen der unbeheizten bzw. mit vorgegebener Leistung beheizten Räume ermitteln. Was die eindeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems (25) betrifft, soll hier nur erwähnt werden, daß diese bei jeder „vernünftigen" Fragestellung gesichert ist.

[1]) Das in der Praxis anzunehmende Auftreten mehrerer „Außenräume" bringt keine Komplikationen, doch wird hier der Einfachheit halber nur von einem Außenraum gesprochen.

[2]) Die Berücksichtigung von Lüftungswärmeverlusten bereitet keine prinzipiellen Schwierigkeiten; sie soll in einer eigenen Arbeit über konvektive Wärmetransporte in Baukonstruktionen besprochen werden.

4. Periodisch eingeschwungene Vorgänge

Den Ausgangspunkt für die Untersuchung instationärer Wärmeleitungsvorgänge bildet die Differentialgleichung (3). Wie schon dargelegt, kann man die Lösung eines Randwertproblems mit Wärmequellen aus der Lösung des gleichen Randwertproblems ohne Wärmequellen und der zu den Randwerten $T_k = 0$ gehörigen Lösung U_I der inhomogenen Differentialgleichung

$$c \cdot \varrho \cdot \frac{\partial U_I}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} U_I) = W(x, y, z, t) \qquad (26)$$

additiv zusammensetzen.

Die Lösung des Randwertproblems bei Abwesenheit von Wärmequellen ist für den periodischen Fall ausführlich in [2] geschildert und muß daher hier nicht eigens besprochen werden. Für das Aufsuchen jener periodischen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (3), die den Randbedingungen (7) genügt, wird wie in [2] der Ansatz

$$U_I(x, y, z, t) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} u_{I_\nu}(x, y, z) \cdot e^{\frac{i\nu\pi t}{l}} \qquad (27)$$

gemacht.

Auch die Quelldichte $W(x, y, z, t)$ muß natürlich in t periodisch sein und in eine *Fourier*-Reihe entwickelt werden. Die Untersuchung soll auf Quelldichteverteilungen der Form

$$W(x, y, z, t) = H(t) \cdot r(x, y, z) \qquad (28)$$

beschränkt bleiben; die Funktion $r(x, y, z)$ ist dabei die gleiche, wie in Gleichung (11), also auch in der gleichen Weise normiert. Die Funktion $H(t)$ stellt den zeitlichen Verlauf der Heizleistung der gesamten Quelldichteverteilung dar. Die Annahme einer Quelldichteverteilung gemäß Gleichung (28) bedeutet zwar eine Beschränkung, ist aber den meisten praktisch auftretenden Fragestellungen angemessen und führt überdies zu wesentlichen Vereinfachungen beim Aufsuchen von Lösungen.

Die Entwicklung von W in eine *Fourier*-Reihe liefert

$$W(x, y, z, t) = r(x, y, z) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} h_\nu \cdot e^{\frac{i\nu\pi t}{l}}. \qquad (29)$$

Geht man nun mit (27) und (29) in die Differentialgleichung (26) hinein, so erhält man durch anschließenden Koeffizientenvergleich die zeitfreie Differentialgleichung

$$i \cdot c \cdot \varrho \cdot \frac{\nu\pi}{l} \cdot u_{I_\nu} - \operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} u_{I_\nu}) = r \cdot h_\nu. \qquad (30)$$

Mit der Abkürzung $\frac{\nu\pi}{l} = \omega$ und nach Weglassen des Index ν wird daraus

$$i \cdot c \cdot \varrho \cdot \omega \cdot u_I - \operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} u_I) = r \cdot h. \qquad (31)$$

Nach Division durch h und mit der zu (12) analogen Abkürzung

$$f = \frac{u_I}{h} \qquad (32)$$

erhält man schließlich

$$i \cdot c \cdot \varrho \cdot \omega \cdot f - \operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} f) = r. \qquad (33)$$

Die zugehörigen Randbedingungen sind wie im stationären Fall sinngemäß durch (14) gegeben.

Anstelle des im stationären Fall berechneten Wärmestromes Q_j^*, der aufgrund der Quelldichteverteilung W dem Raum j zukommt, kann man nun den entsprechenden Fourierkoeffizienten – die komplexe Amplitude q_j^* – berechnen:

$$q_j^* = \iint_{\mathfrak{A}_j} (\lambda \cdot \operatorname{grad} u_I) \cdot d\vec{a}. \qquad (34)$$

Ebenso kann man analog zu Gleichung (16) einen Verteilungsschlüssel

$$\upsilon_j = \frac{q_j^*}{h} = \iint_{\mathfrak{A}_j} (\lambda \cdot \operatorname{grad} f) \cdot d\vec{a} \qquad (35)$$

für die jeweilige Harmonische angeben. Die Wärmestromamplitude

$$q_i^* = \upsilon_i \cdot h \qquad (36)$$

ist, ebenso wie die Heizleistungsamplitude h und der auf den Raum i entfallende Anteil υ_i komplex, nicht, wie die entsprechenden stationären Größen in Gleichung (20), reell. Über die Summe der den verschiedenen Räumen zukommenden Anteile υ_j der Heizleistungsamplitude h läßt sich nunmehr keine so einfache Aussage machen wie im stationären Fall; insbesondere muß ihre Summe nicht den Wert 1 ergeben.

Ebenso wie im stationären Fall kann man jedoch die zu (21) analoge Gleichung

$$q_i^* = \sum_{j=1}^{m} \upsilon_{ij} \cdot h_j \qquad (37)$$

formulieren. Die Amplitude q_i^* der von allen „Heizkörpern" des Gebäudes dem Raum i zukommenden Wärmeströme wird dadurch als Linearkombination der Heizleistungsamplituden h_j dargestellt. Der komplexe Verteilungsschlüssel υ_{ij} beschreibt die Anteile dieser Heizleistungen und die auftretenden Phasenverschiebungen.

Die weiteren Überlegungen sind die gleichen wie im stationären Fall und führen letztlich auf die zu (25) analoge Gleichung

$$\sum_{j=1}^{m} \upsilon_{ij} \cdot h_j + q_i^{*} = -\sum_{j=0}^{m} l_{ij} \cdot t_j, \qquad (38)$$

die ebenfalls für $i = 1, 2, \ldots, m$ und für alle interessierenden Harmonischen zu formulieren ist[3)].

Nunmehr steht auch im periodisch eingeschwungenen instationären Fall ein Instrument für die Berechnung von Raumlufttemperaturen und Heizkörperleistungen zur Verfügung. Die im stationären Fall gemachten Anmer-

---

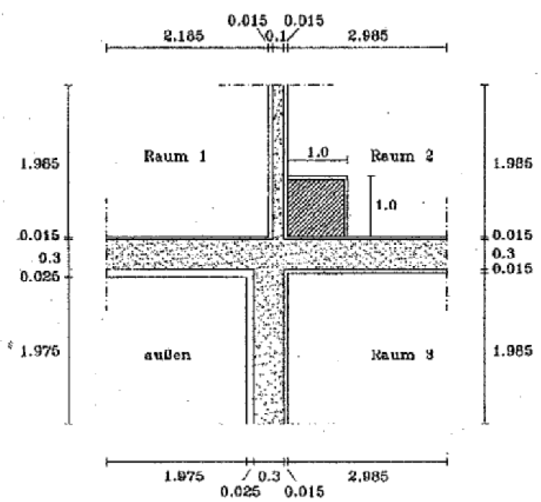
[3)] Es versteht sich von selbst, daß die Leitwerte l_{ij} und der Verteilungsschlüssel υ_{ij} für die verschiedenen Harmonischen unterschiedlich ausfallen. Dennoch sie hier ausdrücklich darauf hingewiesen.

kungen zur Bedeutung des Gleichungssystems (25) sind auch für diesen Fall zutreffend. Für die Umsetzung in die Praxis fehlt im wesentlichen nur noch die Berücksichtigung der Lüftungswärmeverluste, deren Erörterung einer späteren Publikation vorbehalten sein soll.

5. Beispiel

Anhand eines einfachen Beispiels sollen nun die hier eingeführten Begriffe – insbesondere jener des Verteilungsschlüssels – veranschaulicht werden. Als Wärmequelle wird eine in eine Raumecke eingebaute Elektro-Speicherheizung angenommen. Für diese Heizung soll nun der Zusammenhang zwischen der Heizleistung und der dem Raum zukommenden Wärmeleistung näher untersucht werden. Um nicht vom Wesentlichen abzulenken, wird auf konstruktive Details gänzlich verzichtet und die Untersuchung lediglich zweidimensional vorgenommen. Mit dem für die numerischen Berechnungen verwendeten Programm [6] ist es jedoch ohne weiters möglich, Baukonstruktionen detailliert dreidimensional zu erfassen und somit Problemstellungen aus der Praxis zu beantworten.

Betrachtet wird (zweidimensional) ein als Kachelofen ausgebildeter Heizkörper und die an ihn angrenzenden Bauteile, wie sie im *Bild* skizziert sind.



Skizze der betrachteten Baukonstruktion und des Heizkörpers (schraffiert), Maße in m.

Der Heizkörper besteht aus einem Speicherkern mit einer Massendichte $\varrho = 1940\ \mathrm{kgm^{-3}}$, der spezifischen Wärmekapazität $c = 1130\ \mathrm{Jkg^{-1}K^{-1}}$ und der Wärmeleitfähigkeit von $\lambda = 0{,}93\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$. Ummantelt ist der Speicherkern von 4 cm dicken Kacheln mit $\varrho = 2000\ \mathrm{kgm^{-3}}$, $c = 920\ \mathrm{Jkg^{-1}K^{-1}}$ und $\lambda = 1{,}0\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$.

Der Kachelofen ist in die Ecke des Raumes 2 eingebaut und grenzt in einer Länge von jeweils 1 m an die beiden Trennwände zu den Räumen 1 und 3. Die Trennwand zu Raum 3 ist als tragende Innenwand ausgebildet und besteht aus 30 cm dickem Hochloch-Ziegelmauerwerk, für das die Materialkennwerte mit $\varrho = 700\ \mathrm{kgm^{-3}}$, $c = 920\ \mathrm{Jkg^{-1}K^{-1}}$ und $\lambda = 0{,}27\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$ angenommen werden. Auf beiden Seiten der Wand ist mit einer Schichtdicke von 1,5 cm Gipsputz mit $\varrho = 1600\ \mathrm{kgm^{-3}}$, $c = 840\ \mathrm{Jkg^{-1}K^{-1}}$ und $\lambda = 0{,}7\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$ aufgebracht. Die ebenfalls beiderseits mit 1,5 cm Gipsputz versehene Trennwand zwischen Raum 1 und Raum 2 besteht aus 10 cm dickem Vollziegel-Mauerwerk mit $\varrho = 1500\ \mathrm{kgm^{-3}}$, $c = 920\ \mathrm{Jkg^{-1}K^{-1}}$ und $\lambda = 0{,}64\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$.

Während Raum 2 im betrachteten Ausschnitt der Baukonstruktion keine Außenwand besitzt, haben sowohl Raum 1 und Raum 3 einen direkten Bezug zu Raum 0, d. h. nach außen. Die Außenwand besteht für beide Räume aus 30 cm Hochloch-Ziegelmauerwerk, dessen Materialkennwerte ident mit jenen der tragenden Innenwand angesetzt werden. Außen ist diese Wand mit Putz einer Schichtdicke von 2,5 cm und $\varrho = 1600\ \mathrm{kgm^{-3}}$, $c = 1130\ \mathrm{Jkg^{-1}K^{-1}}$ und $\lambda = 0{,}8\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$ verputzt. An den Innenseiten ist wiederum Gipsputz mit einer Schichtdicke von 1,5 cm aufgebracht. Für die Außenseiten wird ein Wärmeübergangskoeffizient von $\alpha_e = 25\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-1}}$ angenommen. Für sämtliche Innenflächen wird der Wärmeübergangskoeffizient α_i auf $8{,}0\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-1}}$ gesetzt.

Unter Verwendung eines auf solche Untersuchungen zugeschnittenen, vom Büro für Angewandte Mathematik in Wien[4)] in Zusammenarbeit mit dem Institut für Hochbau für Architekten der TU Wien unter meiner Leitung entwickelten PC-Programmpaketes [6] wurden die Lösungen der Differentialgleichung (33) für die nullte Harmonische, d. h. den stationären Fall und für die Harmonische mit einer Periodenlänge von 24 Stunden berechnet. Die Beschänkung auf die 24-stündige Periode wurde hierbei lediglich vorgenommen, um nicht vom Wesentlichen abzulenken.

Die die Ortsabhängigkeit der Quelldichteverteilung kennzeichnende Funktion $r(x, y)$ wurde hierbei im Bereich des Speicherkerns auf den konstanten Wert $1\ \mathrm{m^{-3}}$, außerhalb des Speicherkernes auf null gesetzt.

Der Verteilungsschlüssel für die Heizleistungen wird gemäß Gleichung (35) bestimmt. Für den stationären Fall ergibt sich hierbei der Verteilungsschlüssel zu

$$\begin{aligned} \upsilon_{0,\infty} &= 0{,}0044 \\ \upsilon_{1,\infty} &= 0{,}2494 \\ \upsilon_{2,\infty} &= 0{,}6577 \\ \upsilon_{3,\infty} &= 0{,}0885\,. \end{aligned} \tag{39}$$

Für die 24stündige Periode ergibt sich:

$$\begin{aligned} \upsilon_{0,24} &= 0{,}0000 - 0{,}0000 \cdot i \\ \upsilon_{1,24} &= -0{,}0070 - 0{,}0041 \cdot i \\ \upsilon_{2,24} &= 0{,}0007 - 0{,}0507 \cdot i \\ \upsilon_{3,24} &= -0{,}0003 + 0{,}0009 \cdot i\,. \end{aligned} \tag{40}$$

Dem Berechnungsergebnis (39) für den stationären Fall ist zu entnehmen, daß Raum 2, also der durch die Elektrospeicherheizung beheizte Raum, lediglich etwa 66 % der von der Heizung abgegebenen Wärmemenge enthält. Immerhin ca. 25 % der Heizenergie fließen im zeitlichen Mittel

[4)] Programmierung: *T. Kornicki*

dem durch die Vollziegelwand von Raum 2 örtlich getrennten, thermisch aber verbundenen Raum 1 zu. Raum 3 erhält die verbleibenden 9% der vom Kachelofen abgegebenen Wärmemenge. Ein geringfügiger Wärmeabfluß in den Raum 0, also nach außen, ist gemäß (39) ebenfalls zu vermerken.

Die im zeitlichen Mittel von der Heizung abgegebene Wärmemenge kommt zur Gänze den 4 Räumen zu. Man erkennt dies daran, daß die Summe der in (39) aufgeführten Anteile exakt den Wert 1 liefert.

Der in (40) für die 24stündige Periode angegebene Verteilungsschlüssel ist nicht unmittelbar nach Augenschein zu interpretieren. Seine Bedeutung ist Gleichung (36) zu entnehmen, also dem linearen Zusammenhang zwischen der im jeweiligen Raum auftretenden Wärmestromamplitude und der Heizleistungsamplitude.

Ein Blick auf die Berechnungsergebnisse (40) zeigt, daß die Beträge der komplexwertigen Elemente des Verteilungsschlüssels sehr klein sind. Dies bedeutet, daß die Wärmestromamplitude q_j^* im jeweiligen Raum j auch bei stark schwankender Heizleistung, also großer Heizleistungsamplitude h, klein bleibt. Als ein Charakteristikum der untersuchten Heizung erweist sich also die gleichförmige, d.h. in ihrem Zeitverlauf kaum schwankende Wärmeabgabe, ein bei elektrisch beheizten Kachelöfen zwecks Überbrückung von Sperrzeiten durchaus erwünschter Effekt.

Wie nicht anders zu erwarten, ist der Betrag des auf die Tagesperiode bezogenen Schlüsselelementes für Raum 2 mit $|\upsilon_{2,24}| = 0{,}0507$ am größten. Für Raum 0, also außen, ist der entsprechende Betrag vernachlässigbar klein; als errechneter Wert ergibt sich $\upsilon_{0,24} = 1{,}3 \cdot 10^{-5} - 1{,}0 \cdot 10^{-6} \cdot i$.

Das Argument eines Schlüsselelementes liefert gemäß Gleichung (36) direkt die Phasenverschiebung $\varphi = = \varphi_q - \varphi_h$ zwischen der dem Raum j zugeordneten Wärmestromamplitude q_j^* und der Heizleistungsamplitude h. Für Raum 2, also den Raum, in dem der Kachelofen situiert ist, ergibt sich die Phasenverschiebung zu $\varphi = 1{,}557$ oder – nach Division durch ω – zu 5,95 Stunden. Mit anderen Worten heißt dies, daß das Maximum der Wärmeabgabe des Ofens in Raum 2 erst 5 Stunden und 57 Minuten nach dem Maximum der durch den Ofen erbrachten Heizleistung registriert wird. Die untersuchte Heizung erweist sich somit als sehr träge.

6. Zusammenfassung und Ausblick

Die Berücksichtigung von Wärmequellen innerhalb oder an den Oberflächen einer Baukonstruktion ist im Rahmen des in [2] vorgestellten Leitwert-Konzeptes sowohl im stationären als auch im periodisch eingeschwungenen Fall ohne weiteres möglich. Die Auswirkung von Wärmequellen auf die thermischen Vorgänge im Bauwerk lassen sich unabhängig von den jeweiligen Randbedingungen und unabhängig vom Wert der den Wärmequellen zugeordneten Heizleistungen beschreiben. Als kennzeichnende Größen zur Charakterisierung einer Wärmequelle dienen im Rahmen des hier vorgestellten Konzeptes die Verteilungsschlüssel und die Heizleistungsamplituden.

Die Berechnung von Heizleistungs-Verteilungsschlüsseln und von Leitwert- Matrizen (siehe [2]) ermöglicht es, das thermische Verhalten von Baukonstruktionen unter Berücksichtigung zwei- und dreidimensionaler Wärmeleitungsvorgänge instationär zu erfassen. Insbesondere liefert sie die grundlegenden Daten für dreidimensional rechnende Programme zur Simulation des thermischen Verhaltens ganzer Gebäude unter periodisch eingeschwungenen Verhältnissen.

Literatur

[1] *Heindl, W., Kreč, K., Panzhauser, E.* und *Sigmund, A.:* Wärmebrücken. Springer-Verlag Wien-New York 1987.

[2] *Kreč, K.:* Zur Wärmespeicherung in Baukonstruktionen. Gesundheits-Ingenieur 114(1993), H. 1, S. 11–18.

[3] *Koch, H. A.* und *Pechinger, U.:* Möglichkeiten zur Berücksichtigung von Sonnen- und Wärmestrahlungseinflüssen auf Gebäudeoberflächen. Gesundheits-Ingenieur 98(1977), H. 10, S. 265–280.

[4] *Haferland, Fr., Heindl, W.* und *Fuchs, H.:* Ein Verfahren zur Ermittlung des wärmetechnischen Verhaltens ganzer Gebäude unter periodisch wechselnder Wärmeeinwirkung und rechnerische Untersuchungen zur Ermittlung der Größenordnung bestimter Einflüsse von Bauweise und Konstruktion sowie sonstiger Parameter auf die Temperaturstabilität in Räumen. Berichte aus der Bauforschung H. 99, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn Berlin – München – Düsseldorf 1975.

[5] *Frank, P.* und *Mises, R.:* Die Differential- und Integralgleichungen. Band 2. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1961.

[6] Programmpaket WAEBRU, weiterführende Experimentalversion 1993.